با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی و آمار ۳ دوازدهم
فصل سوم

عنوان فصل: الگوهای غیرخطی

از صفحه‌ی ۷۳ تا صفحه‌ی ۱۰۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل الگوهای غیرخطی آمده است.

مباحث فصل: درس ۱ دنباله‌ی هندسی، درس ۲ ریشه‌ی nام و توان گویا، درس ۳ تابع نمایی

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۷۵ · فعالیت — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۷
۲	صفحه ۷۶ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۸
۳	صفحه ۷۷ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی (۳ پرسش)	۸
۶	صفحه ۷۸ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۰
۷	صفحه ۷۹ · فعالیت — درس ۱: دنباله‌ی هندسی (۴ پرسش)	۱۰
۱۱	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲
۱۲	صفحه ۸۱ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی (۲ پرسش)	۱۳
۱۴	صفحه ۸۳ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی (۶ پرسش)	۱۴
۲۰	صفحه ۸۴ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی (۵ پرسش)	۱۶
۲۵	صفحه ۸۵ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۸
۲۶	صفحه ۸۵ · بازی و ریاضی — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۹
۲۷	صفحه ۸۶ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا (۲ پرسش)	۱۹
۲۹	صفحه ۸۷ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا	۲۰
۳۰	صفحه ۸۸ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا (۲ پرسش)	۲۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۲ صفحه ۹۰ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۲۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳ صفحه ۹۱ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۲۲

۳۴ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا (۳ پرسش) ۲۲

۳۷ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا (۳ پرسش) ۲۳

۴۰ صفحه ۹۳ · تمرین — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا (۲ پرسش) ۲۴

۴۲ صفحه ۹۴ · تمرین — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا (۳ پرسش) ۲۵

۴۵ صفحه ۹۵ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۲۶

۴۶ صفحه ۹۶ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی (۳ پرسش) ۲۶

۴۹ صفحه ۹۷ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۲۸

۵۰ صفحه ۹۸ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۲۹

۵۱ صفحه ۹۹ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۲۹

۵۲ صفحه ۱۰۰ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۳۰

۵۳ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس — درس ۳: تابع نمایی ۳۲

۵۴ صفحه ۱۰۱ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی (۳ پرسش) ۳۲

۵۷ صفحه ۱۰۲ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی (۲ پرسش) ۳۴

۵۹ صفحه ۱۰۲ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۳۵

۶۰ صفحه ۱۰۳ · کار در کلاس — درس ۳: تابع نمایی ۳۶

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۱ صفحه ۱۰۴ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی (۳ پرسش) ۳۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

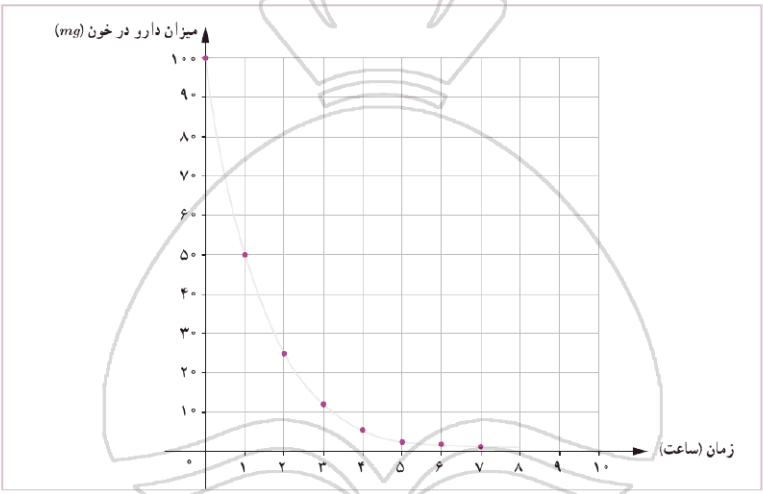
۱ صفحه ۷۵ فعالیت

شخصی ۱۰۰ میلی‌گرم از دارویی که نیمه‌عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. با توجه به نمودار «میزان دارو در خون ـ زمان» به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه‌عمر، کمتر از ۲۰ میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از nامین نیمه‌عمر باشد، رابطه‌ی بازگشتی دنباله در بدن شخص چگونه است؟ با توجه به تعریف دنباله‌ی a_n و نیز تعریف نیمه‌عمر، هر جمله‌ی دنباله از حاصل‌ضرب عدد ثابت ..... در جمله‌ی پیشین به‌دست می‌آید؛ یعنی: $a_1 = ۵۰$ ، $a_{n+1} = a_n$ .....

ج) ضابطه‌ی تابعی (جمله‌ی عمومی) دنباله را مشخص کنید. $a_1 = ۵۰$ ، $a_2 = ۵۰ \times ½$ ، $a_3 = (۵۰ \times ½) \times ½$ = $(۵۰ \times ½^2)$ ، $a_4 =$ ..... $\Longrightarrow a_n =$ ..... $\times ۵۰$



الف) مقدار دارو هر نیمه‌عمر نصف می‌شود: ۱۰۰ ← ۵۰ ← ۲۵ ← ۱۲/۵. پس از نیمه‌عمر دوم ۲۵ (هنوز بیشتر از ۲۰) و پس از نیمه‌عمر سوم ۱۲/۵ میلی‌گرم است. پس **پس از ۳ نیمه‌عمر** (۳ ساعت) مقدار دارو کمتر از ۲۰ میلی‌گرم می‌شود.

میزان دارو هرگز دقیقاً صفر نمی‌شود، زیرا نصف کردن یک عدد مثبت همیشه عددی مثبت می‌دهد (نمودار نیز به محور افقی نزدیک می‌شود ولی آن را قطع نمی‌کند).

ب) هر جمله از ضرب عدد ثابت $\frac{۱}{۲}$ در جمله‌ی قبل به‌دست می‌آید: $a_1 = ۵۰$ ، $a_{n+1} = \frac{۱}{۲} a_n$

ج) $a_4 = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۱}{۲})^2 \times ۵۰ = (\frac{۱}{۲})^3 \times ۵۰$ پس $a_n = (\frac{۱}{۲})^{n-1} \times ۵۰$ (دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۵۰ و نسبت مشترک $\frac{۱}{۲}$).

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۲ صفحه ۷۶ کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید. (ردیف‌های اول تا پنجم: ردیف اول نمونه است. ردیف دوم: $a_1 = ۱/۸۱$ ، $r = ۳/۲$ ؛ ردیف سوم: $a_1 = ۴$ ، $r = -۱/۲$ و $a_{n+1} = a_n(-۱/۲)$ ؛ ردیف چهارم: ۱ , ۱/۵ , ۱/۲۵ , ۱/۱۲۵ , ۱/۶۲۵ ؛ ردیف پنجم: $a_n = ۱۰۰(۱/۴)^{n-۱}$)

جمله‌ی اول	نسبت مشترک	پنج جمله‌ی اول	ضابطه‌ی بازگشتی	جمله‌ی عمومی دنباله
$a_1 = \frac{۱}{۸۱}$	$r = \frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۸۱}, \frac{۱}{۵۴}, \frac{۱}{۳۶}, \frac{۱}{۲۴}, \frac{۱}{۱۶}$	$a_{n+1} = \frac{۳}{۲}a_n,\ a_1 = \frac{۱}{۸۱}$	$a_n = \frac{۱}{۸۱}(\frac{۳}{۲})^{n-۱}$
$a_1 = ۴$	$r = -\frac{۱}{۲}$	$۴, -۲, ۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$	$a_{n+1} = (-\frac{۱}{۲})a_n,\ a_1 = ۴$	$a_n = ۴(-\frac{۱}{۲})^{n-۱}$
$a_1 = ۱$	$r = \frac{۱}{۵}$	$۱, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲۵}, \frac{۱}{۱۲۵}, \frac{۱}{۶۲۵}$	$a_{n+1} = \frac{۱}{۵}a_n,\ a_1 = ۱$	$a_n = (\frac{۱}{۵})^{n-۱}$
$a_1 = ۱۰۰$	$r = \frac{۱}{۴}$	$۱۰۰, ۲۵, \frac{۲۵}{۴}, \frac{۲۵}{۱۶}, \frac{۲۵}{۶۴}$	$a_{n+1} = \frac{۱}{۴}a_n,\ a_1 = ۱۰۰$	$a_n = ۱۰۰(\frac{۱}{۴})^{n-۱}$

روش: نسبت مشترک = هر جمله ÷ جمله‌ی قبل؛ جمله‌ی بعد = جمله‌ی قبل × r ؛ جمله‌ی عمومی $a_n = a_1 r^{n-۱}$.

۳ صفحه ۷۷ کار در کلاس

۲. با توجه به جدول قبل، در هر دنباله‌ی هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{(n-۱)}$ با فرض $a_1 > ۰$:

الف) اگر $۰ < r < ۱$ ، دنباله‌ی a_n ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

ب) اگر $r > ۱$ ، دنباله‌ی a_n ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

ج) اگر $r = ۱$ ، دنباله‌ی a_n ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

الف) هر جمله از ضرب جمله‌ی قبل در عددی بین صفر و یک (کوچک‌تر از ۱) به‌دست می‌آید و کوچک‌تر می‌شود (مثل ۱, ۱/۳, ۱/۹, ...): **کاهشی**.

ب) ضرب در عددی بزرگ‌تر از ۱ جمله را بزرگ‌تر می‌کند (مثل ۱/۸۱, ۱/۵۴, ...): **افزایشی**.

ج) همه‌ی جمله‌ها برابر a_1 هستند: **ثابت**.

۴ صفحه ۷۷ کار در کلاس

ضابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی هندسی ... , a , ar , ar^2 , ar^3 , ... را مشخص کنید.

هر جمله از ضرب جمله‌ی قبل در r به‌دست می‌آید:

$a_1 = a,\qquad a_{n+1} = r\,a_n$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ صفحه ۷۷ کار در کلاس

(هزینه‌ی استهلاک) شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹/۶۰۰/۰۰۰ تومان خریده است. هزینه‌ی استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر، n سال پس از خرید باشد :

الف) ضابطه‌ی تابعی دنباله‌ی v_n را به‌دست آورید. با توجه به هزینه‌ی استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی: $v_1 = ۹/۶۰۰/۰۰۰$ ، $v_2 = ۹/۶۰۰/۰۰۰ \times ۹۰/۱۰۰ = ...$ ، $v_3 = ...$ ، $v_n = ...$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش را مشخص کنید؟ چرا؟ با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان کاهش ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین ...

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه‌ی v_n را به‌گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله‌ی v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟ (راهنمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹/۶۰۰/۰۰۰ تومان، نصف ارزش آن ۴/۸۰۰/۰۰۰ تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n <$ ۴/۸۰۰/۰۰۰ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

هـ) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کم شود، با حالتی که k درصد از آن کم شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله‌ی حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله‌ی هندسی است؟

الف)

$v_2 = ۹۶۰۰۰۰۰ \times \frac{۹۰}{۱۰۰} = ۸۶۴۰۰۰۰$ ، $v_3 = ۹۶۰۰۰۰۰ \times (۰/۹)^2 = ۷۷۷۶۰۰۰$ ، $v_n = ۹۶۰۰۰۰۰ \times (۰/۹)^{n-1}$ (دنباله‌ی هندسی با $r = ۰/۹$).

ب)

کاهش ارزش در سال اول بیشترین است (از v_1 به v_2: ۹۶۰/۰۰۰ تومان)؛ چون ارزش در سال‌های بعد کمتر است، ۱۰٪ آن (مقدار کاهش) هم کمتر است. کمترین کاهش وجود ندارد، زیرا ارزش یخچال هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و مقدار کاهش هر سال کمی از سال پیش کوچک‌تر ولی همیشه مثبت است.

ج)

چون هر بار ۹۰٪ ارزش قبلی باقی می‌ماند و ضرب عددی مثبت در عددی مثبت هرگز صفر نمی‌شود، ارزش هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. اگر فرض کنیم هر سال مقدار ثابتی (یک دهم قیمت خرید، یعنی ۹۶۰/۰۰۰ تومان) از ارزش کم شود، ارزش پس از ۱۰ سال صفر می‌شود:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$v_n = 9600000 - 960000(n-1)$ ، که در آن $v_1 = 17$ (ده سال پس از v_1). این دنباله **حسابی** است (قدر نسبت $-960/000$).

د)

$0/9)^{n-1} < 0/5 \Rightarrow (0/9)^{n-1} < 4800000/9600000$. چون $(0/9)^6 \approx 0/531$ و $(0/9)^7 \approx 0/478$ ، کوچک‌ترین $n-1$ برابر 7 و $n = 8$ است ($v_8 \approx 4/591/650$). یعنی 7 سال پس از خرید (v_1 قیمت خرید است) ارزش از نصف قیمت کمتر می‌شود.

هـ)

اگر در هر مرحله k واحد کم شود، تفاوت دو جمله‌ی متوالی ثابت ($-k$) است: دنباله‌ی **حسابی**. اگر k درصد از جمله‌ی قبل کم شود، جمله‌ی بعد ($1-k/100$) برابر جمله‌ی قبل است (نسبت دو جمله‌ی متوالی ثابت): دنباله‌ی **هندسی**.

۶ صفحه ۷۸ **کار در کلاس**

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر ماده‌ی کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

میزان کافئین پس از n نیمه‌عمر: $80 \times (\frac{1}{2})^n$. باید کمتر از ۰/۵ شود:

$80 \times (\frac{1}{2})^n < 0/5 \Rightarrow 2^n > 160$

چون $2^7 = 128$ (کمتر از ۱۶۰) و $2^8 = 256$ (بیشتر از ۱۶۰)، کوچک‌ترین n برابر ۸ است ($80/256 = 0/3125$ میلی‌گرم). پس **پس از ۸ نیمه‌عمر، یعنی ۸×۶ = ۴۸ ساعت (دو شبانه‌روز)** می‌توان دوباره چای یا قهوه مصرف کرد.

۷ صفحه ۷۹ **فعالیت**

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حاوی ۸۰ میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد است. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید. (S_n میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جدول: n=۱: ۱۵ بهمن، ۰۰:۰۰ بامداد، $S_۱$ = ۸۰ mg ؛ n=۲: ۱۵ بهمن، ۸:۰۰ صبح، $S_۲$ = $S_۱$ ½ + ۸۰ = ۸۰ + ۴۰ = ۱۲۰ ؛ n=۳: ۱۵ بهمن، ۴:۰۰ بعد از ظهر، $S_۳$ = $S_۲$ ½ + ۸۰ = ۸۰ + ۶۰ = ۱۴۰ ؛ n=۴: ۱۶ بهمن، ۰۰:۰۰ بامداد، $S_۴$ = ... = ۸۰ + ... ؛ n=۵: ۱۶ بهمن، ....., $S_۵$ = ... = ... ؛ n=۶: ....., ..., $S_۶$ = ... + ... =

n	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی‌گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	۸۰
۲	۱۵ بهمن	۸:۰۰ صبح	۱۲۰ = ۸۰ + ۴۰
۳	۱۵ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	۱۴۰ = ۸۰ + ۶۰
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	۱۵۰ = ۸۰ + ۷۰ = ۸۰ + ۱۴۰×½
۵	۱۶ بهمن	۸:۰۰ صبح	۱۵۵ = ۸۰ + ۷۵ = ۸۰ + ۱۵۰×½
۶	۱۶ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	۱۵۷/۵ = ۸۰ + ۷۷/۵ = ۸۰ + ۱۵۵×½

پس از ۳ بار مصرف ۱۴۰ میلی‌گرم و پس از ۶ بار مصرف ۱۵۷/۵ میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک در بدن بیمار است. (هر ۸ ساعت یک قرص؛ نصف مقدار قبلی می‌ماند و ۸۰ میلی‌گرم اضافه می‌شود.)

۸ صفحه ۷۹ **فعالیت**

ب) با توجه به نحوه‌ی کامل کردن جدول بالا، رابطه‌ی بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود : $S_{n+۱}$ = ... + S_n ½ ، $S_۱$ = ...

$S_۱ = ۸۰$ ، $S_{n+۱} = ۸۰ + \frac{۱}{۲}S_n$ (پس از هر بار مصرف نصف مقدار قبلی می‌ماند و ۸۰ میلی‌گرم اضافه می‌شود).

۹ صفحه ۷۹ **فعالیت**

ج) برای نوشتن ضابطه‌ی تابعی دنباله‌ی S_n برحسب n، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله A = ۸۰ mg است)، با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی به‌دست آمده در قسمت ب : $S_۱$ = A ؛ $S_۲ = S_۱ ½ + A$ = ... ؛ $S_۳$ = ... + ... = $A + ½A + (½)^۲A = A + ½(A + ½A)$ ؛ به همین صورت برای محاسبه‌ی $S_۶$: $S_۶ = (½)^۲A + ½A + A + ... + A(½)^{۰۰}$ ؛ پس برای محاسبه‌ی مجموع آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف : (۱) $S_n = (½)^۲A + ½A + A + ... + A(½)^{n-۱}$. اگر طرفین رابطه‌ی (۱) را در ضریب ½ ضرب کنیم : (۲)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

S_n ½ = A½ + ... + ... + ... با تفاضل (۱) از (۲) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید ... (ضابطه‌ی تابعی S_n را بنویسید و به ازای A = ۸۰ ساده کنید.)

$S_۳ = A + \frac{۱}{۲}S_۲ = A + \frac{۱}{۲}A + (\frac{۱}{۲})^۲A$, $S_۲ = A + \frac{۱}{۲}A$ ؛ در $S_۶$ جمله‌ی آخر $(\frac{۱}{۲})^۵A$ است.

طرفین (۱) را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}S_n = \frac{۱}{۲}A + (\frac{۱}{۲})^۲A + \cdots + (\frac{۱}{۲})^{n-۱}A + (\frac{۱}{۲})^nA \quad (۲)$$

(۱) – (۲) :

$$S_n - \frac{۱}{۲}S_n = A - (\frac{۱}{۲})^nA \Rightarrow S_n(۱ - \frac{۱}{۲}) = A(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$$

$$S_n = A \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲A(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$$ و با A = ۸۰ : $S_n = ۱۶۰(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$

---

۱۰ صفحه ۷۹ **فعالیت**

د) با توجه به رابطه‌ی به‌دست آمده برای S_n : $S_۱ = ۱۶۰(۱ - (½)^۱) = ۱۶۰ \times ½ = ۸۰$ ، $S_۲ = ...$ ، $S_۶ = ... با جای‌گذاری مقادیر n=۱ تا n=۶ در رابطه‌ی به‌دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به‌دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

$S_۲ = ۱۶۰(۱ - \frac{۱}{۴}) = ۱۶۰ \times \frac{۳}{۴} = ۱۲۰$

$S_۶ = ۱۶۰(۱ - \frac{۱}{۶۴}) = ۱۶۰ \times \frac{۶۳}{۶۴} = ۱۵۷/۵$

همچنین $S_۳ = ۱۶۰ \times ۷/۸ = ۱۴۰$ ، $S_۴ = ۱۶۰ \times ۱۵/۱۶ = ۱۵۰$ و $S_۵ = ۱۶۰ \times ۳۱/۳۲ = ۱۵۵$. همه با جدول قسمت الف برابرند.

---

۱۱ صفحه ۸۰ **کار در کلاس**

در فعالیت صفحه‌ی پیش :

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

ب) ضابطه‌های دنباله‌های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای $a_۲$ و $S_۲$ چیست؟

الف) جمله‌ی اول (مقدار یک قرص) a = ۸۰ و نسبت مشترک $r = \frac{۱}{۲}$ است.

ب) $a_n = ۸۰(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$ ، $S_n = ۸۰ \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱۶۰(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$

$a_۲ = ۴۰$: مقدار آنتی‌بیوتیکی است که از قرص اول، پس از ۸ ساعت (یک نیمه‌عمر) در بدن مانده است. $S_۲ = ۱۲۰$: مجموع ۲ جمله‌ی اول (۸۰ + ۴۰) یعنی کل آنتی‌بیوتیک موجود در بدن پس از مصرف قرص دوم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۸۱ کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

(جمله‌های دنباله، مجموع n جمله‌ی اول S_n) ردیف اول: ½ , ۱/۶ , ۱/۱۸ , ۱/۵۴ , ... با a_1 = ½ ، r = ⅓ ، S_5 = S_9 و S_3 ، ... , ۱/۱۰ , ۱/۵ , ۲/۵ ؛ ردیف سوم: S_8 = و S_4 ، ... , ۱/۶۴ , ۱/۱۶ , ¼ ؛ ردیف دوم: $S_1$۰ = ۱۲۱/۱۶۲ و S_6 ، ... , ۱۰ , ۲ , ۲/۵ ؛ ردیف چهارم: = .

دنباله	a_1	r	جمله‌ی اول n مجموع
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$S_{10} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^{10})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{14762}{19683}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$S_8 = \frac{21845}{65536}$ ، $S_4 = \frac{85}{256}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$S_9 = \frac{511}{640}$ ، $S_3 = \frac{7}{10}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$\frac{2}{5}$	5	$S_6 = \frac{\frac{2}{5}(5^6-1)}{5-1} = \frac{7812}{5} = 1562/4$

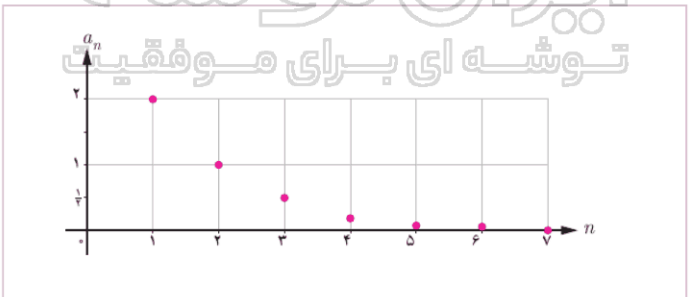
فرمول: $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$. مثلاً $S_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^4}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{255}{256} = \frac{85}{256}$ ؛ $S_3 = \frac{2}{5} \times \frac{1-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{10}$.

۱۳ صفحه ۸۱ کار در کلاس

۲. نمودار زیر یک دنباله‌ی هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله‌ی اول آن و محاسبه‌ی نسبت مشترک دنباله‌ی هندسی :

الف) جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل $S_1$۰ را به‌دست آورید.



از نمودار: $a_1 = 2$ ، $a_2 = 1$ ، $a_3 = \frac{1}{2}$. نسبت مشترک $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2} \div 2 \dots = r$.

الف) $a_n = 2(\frac{1}{2})^{n-1}$

ب) $S_{10} = 2 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 4(1-\frac{1}{1024}) = \frac{1023}{256} \approx 3/996$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۸۳ تمرین

۱. با نوشتن جمله‌های رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1} = (a_n)^2$ ، $a_1 = \frac{1}{2}$ **۲)** $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$ ، $a_1 = \frac{1}{2}$ **۳)** $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{1}$ ، $a_1 = 1$ **۴)** $a_{n+1} = 2 a_n$ ، $a_1 = 1$

۱) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$: نسبت‌ها $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ برابر نیستند؛ هندسی نیست.

۲) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$: هر جمله $\frac{2}{3}$ برابر قبلی است؛ **هندسی** ($r = \frac{2}{3}$).

۳) $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$: $\frac{2/3}{1/2} \neq \frac{1/2}{1}$ ؛ هندسی نیست.

۴) $1, 2, 4, 8, \ldots$: **هندسی** ($r = 2$).

پس گزینه‌های (۲) و (۴) دنباله‌ی هندسی‌اند.

۱۵ صفحه ۸۳ تمرین

۲. با توجه به مفهوم دنباله‌ی هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله‌ی هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه b) $a \times c = b^2$ را واسطه‌ی هندسی میان a و c می‌نامند.)

فرض کنیم نسبت مشترک r باشد؛ در این صورت $b = ar$ و $c = br = ar^2$. پس $a \times c = a \times ar^2 = a^2r^2 = (ar)^2 = b^2$. (یا از $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = r$ نتیجه می‌شود $b^2 = ac$.)

۱۶ صفحه ۸۳ تمرین

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار x را به‌دست آورید.

طبق تمرین ۲ (واسطه‌ی هندسی): $(x+2)^2 = x(x+3)$.

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x \Rightarrow x = -4$

بررسی: جمله‌ها $-1, -2, -4$ هستند که با نسبت ۲ دنباله‌ی هندسی‌اند.

۱۷ صفحه ۸۳ تمرین

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده‌ی سرطانی او در ابتدا $۱۰^{۱۲}$ سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی‌درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد توده‌ی سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به‌طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از ۷×۱۰^{۶} سلول شود و سپس با کوچک شدن توده‌ی سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده‌ی سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

الف) هر بار ۴۰٪ سلول‌ها باقی می‌ماند، پس دنباله‌ی هندسی با $r = ۰/۴$ داریم:

$$۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^{۳} = ۱۰^{۱۲} \times ۰/۰۶۴ = ۶/۴ \times ۱۰^{۱۰}$$ سلول.

ب) $۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^{n} < ۷ \times ۱۰^{۶} \Rightarrow (۰/۴)^{n} < ۷ \times ۱۰^{-۶}$. با ماشین حساب: $(۰/۴)^{۱۲} \approx ۱/۶۸ \times ۱۰^{-۵}$ (هنوز بزرگ‌تر) و $(۰/۴)^{۱۳} \approx ۶/۷۱ \times ۱۰^{-۶}$ (کوچک‌تر از ۷×۱۰^{-۶}). پس باید **۱۳ مرتبه** شیمی‌درمانی شود.

۱۸ صفحه ۸۳ تمرین

۵. میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله‌ی شروع از a و ختم به b یک دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه‌ی $b/a = r^{n+۱}$ به‌دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات (n+۲) جمله است.)

دنباله: $a , ar , ar^{۲} , \dots$ و جمله‌ی $(n+۲)$ام برابر b است. طبق $a_k = a_۱ r^{k-۱}$:

$$b = a r^{(n+۲)-۱} = a r^{n+۱} \Rightarrow r^{n+۱} = \frac{b}{a}$$

۱۹ صفحه ۸۳ تمرین

۶. جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی ۲۷ و جمله‌ی پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله‌ی هفتم این دنباله‌ی هندسی را به‌دست آورید.

$$a_۵ = a_۳ r^{۲} \Rightarrow ۲۴۳ = ۲۷ r^{۲} \Rightarrow r^{۲} = ۹$$

$a_۷ = a_۵ r^{۲} = ۲۴۳ \times ۹ = ۲۱۸۷$ (چه $r = ۳$ و چه $r = -۳$، جواب یکی است).

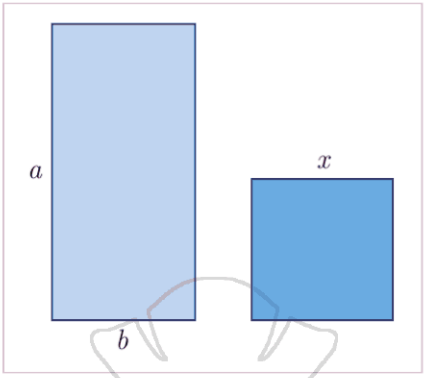
بررسی با $a_۱ = ۳$ و $r = ۳$: ۳ , ۹ , ۲۷ , ۸۱ , ۲۴۳ , ۷۲۹ , ۲۱۸۷.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ صفحه ۸۴ تمرین

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم‌مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟

الف) x و b و a ب) b و x و a پ) x و a و b



مساحت‌ها برابرند: $x^2 = ab$. طبق تمرین ۲، اگر x واسطه‌ی هندسی دو عدد باشد، سه عدد (با x در وسط) دنباله‌ی هندسی‌اند.

پس دنباله‌ی «b و x و a» یعنی گزینه‌ی **ب** هندسی است (نسبت‌ها: $x/b = a/x$ چون $x^2 = ab$). در گزینه‌های دیگر x در وسط نیست و در حالت کلی هندسی نیستند.

۲۱ صفحه ۸۴ تمرین

۸. یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جوّ زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب‌سنگ به جوّ زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

هر دقیقه ۸۵٪ باقی می‌ماند ($r = ۰/۸۵$):

$۱۵۰۰۰ \times (۰/۸۵)^5 \approx ۱۵۰۰۰ \times ۰/۴۴۳۷ = ۶۶۵۵/۶$ کیلوگرم (حدود ۶۶۵۶ کیلوگرم).

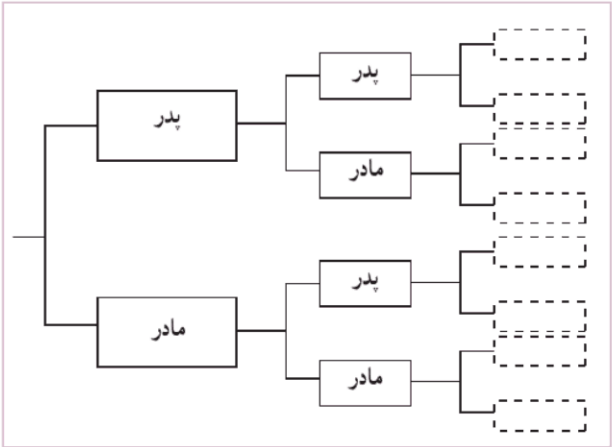
۲۲ صفحه ۸۴ تمرین

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادربزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد.

الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟



تعداد نیاکان در نسل‌ها: ۲, ۴, ۸, ... دنباله‌ی هندسی با $a = ۲$ و $r = ۲$ است.

الف) $a_{۱۰} = ۲ \times ۲^{۹} = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ نفر.

ب) $S_{۱۰} = ۲ \times \frac{۲^{۱۰} - ۱}{۲ - ۱} = ۲ \times ۱۰۲۳ = ۲۰۴۶$ نفر.

۲۳ صفحه ۸۴ تمرین

۱۰. مجموع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱ + ۴ + ۱۶ + ... + ۴۰۹۶

ب) ۱/۵ + ۱/۱۰ + ۱/۲۰ + ... + ۱/۶۴۰

الف) $r = ۴$ ، $a = ۱$ و $۴۰۹۶ = ۴^{۶}$ پس جمله‌ی هفتم است ($n = ۷$):

$$S_{۷} = ۱ \times \frac{۴^{۷} - ۱}{۴ - ۱} = \frac{۱۶۳۸۳}{۳} = ۵۴۶۱$$

ب) $a = \frac{۱}{۵}$ ، $r = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۱۲۸} = \frac{۱}{۵}(\frac{۱}{۲})^{۷} = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۲۵} = \frac{۱}{۶۴۰}$ پس جمله‌ی هشتم است ($n = ۸$):

$$S_{۸} = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^{۸}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲۵۵}{۲۵۶} = \frac{۵۱}{۱۲۸}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۸۴ تمرین

۱۱. نخستین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله‌ی هندسی ½ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به‌دست آورید.

$$۱۵۳۶(\frac{۱}{۲})^{n-۱} = ۶ \Rightarrow ۲^{n-۱} = \frac{۱۵۳۶}{۶} = ۲۵۶ = ۲^{۸} \Rightarrow n = ۹$$

پس جمله‌ی نهم برابر ۶ است.

$$S_9 = 1536 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^9}{\frac{1}{2}} = 3072 \times \frac{511}{512} = 6 \times 511 = 3066$$

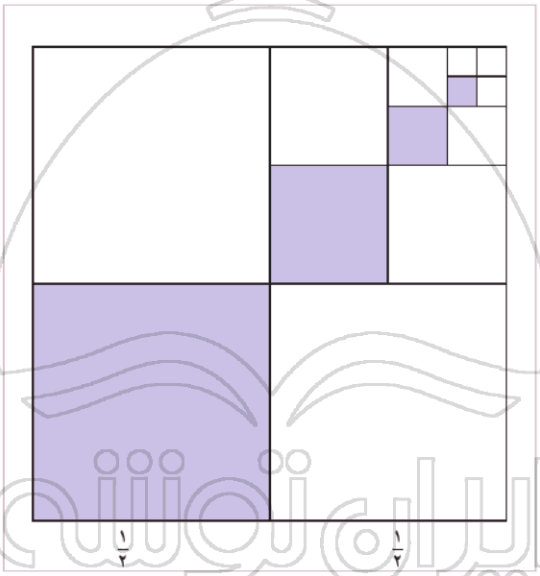
۲۵ صفحه ۸۵ تمرین

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.

الف) چرا دنباله‌ی مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟



الف) ضلع مربع اول $\frac{1}{2}$ ، مساحت $\frac{1}{4}$. در هر مرحله مربع تقسیم‌شده نصف ضلع دارد و مربع رنگی نیز نصف ضلع مربع قبلی را دارد؛ پس مساحت هر مربع رنگی $\frac{1}{4}$ برابر مساحت مربع رنگی قبلی است: مساحت‌ها $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$ با نسبت ثابت $\frac{1}{4}$ ، یعنی دنباله‌ی هندسی.

ب) $S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1-(\frac{1}{4})^n\right)$

پ) $S_6 = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4096}) = \frac{1}{3} \times \frac{4095}{4096} = \frac{1365}{4096} \approx 0/333$ متر مربع.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۸۵ بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به‌گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنباله‌ی هندسی تشکیل بدهد. (اعداد داده‌شده در شکل: ۲ ، ۱۸ ، ۱/۴ ، ۹ ، ۳۲ ، ۱۰۰)

راه حل: در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله واسطه‌ی هندسی دو جمله‌ی کناری است. با دو عدد در یک سطر یا ستون، بقیه‌ی خانه‌ها پیدا می‌شوند؛ مثلاً در ستون چهارم از ۲ و ۳۲ (چهار خانه فاصله) r = ۲ و ستون ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴ ؛ در سطر ۲ و ۱۸ (دو خانه فاصله) r = ۳ و سطر ... ۲/۳ ، ۲ ، ۶ ، ۱۸ ، ۵۴ و ستون ۵۴ ، ۹ ، ۳/۲ ، ۱/۴ ؛ ... با ادامه‌ی همین روش خانه‌ها یکی‌یکی پر می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷ صفحه ۸۶ فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$۴^۳ = (۲)^{-۷} = (\frac{۲}{۵})^۴ = ۷۳^۱ = (-۳)^۶ = -۳^۶ = (۰/۰۱)^۵ = (۱\frac{۱}{۲})^۰ =$

$۴^۳ = ۶۴$ ؛ $۲^{-۷} = \frac{۱}{۲^۷} = \frac{۱}{۱۲۸}$ ؛ $(\frac{۲}{۵})^۴ = \frac{۱۶}{۶۲۵}$ ؛ $۷۳^۱ = ۷۳$

$(-۳)^۶ = ۷۲۹$ ؛ $-۳^۶ = -۷۲۹$ (توان فقط روی ۳ است) ؛ $(۱۰^{-۲})^۵ = ۱۰^{-۱۰}$ ؛ $(۰/۰۱)^۵$ ؛ $(۱\frac{۱}{۲})^۰ = ۱$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۲۸ صفحه ۸۶ فعالیت

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند.)

$(-۳۶)^۷ \div (۲/۱)^۶ = ۹^۷ \times (۲۱/۱۰)^۴ = (۲۱/۱۰)^{۱۱} = (۲/۱)^۱$ **(نمونه)** $(-۴)^۳ \times (-۵)^۳ = (۴/۷)^۵ \div (۴/۷)^۸ = (۱۰^۶)^۸ =$

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید. (جدول: ردیف‌ها $a^m \cdot$

با نمونه‌ی $a^{m+n} = a^n \times a^m$ ؛ **ردیف** $۵^{۱۵} = ۵^۸ \times ۵^۷$ **با نمونه‌ی** $a^{m-n} = a^n / a^m$ ؛ $۹^۴ = ۹^۶ \div ۹^{۱۰}$ ؛ $(ab)^m = b^m \cdot a^m$ ؛ $(a/b)^m = b^m / a^m$ ؛ **با نمونه‌ی** $a^{mn} = (a^m)^n$ **.** $۲^{۱۲} = ۲^{۳\times۴} = (۲^۳)^۴$

الف) جای هر عبارت در جدول:

رابطه	مثال
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(۲/۱)^۶ \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^۴ = (۲/۱)^{۱۱}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{۴}{۷})^۵ \div (\frac{۴}{۷})^۸ = (\frac{۴}{۷})^{۵-۸} = (\frac{۴}{۷})^{-۳}$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-۴)^۳ \times (-۵)^۳ = [(-۴)(-۵)]^۳ = ۲۰^۳$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-۳۶)^۷ \div ۹^۷ = (\frac{-۳۶}{۹})^۷ = (-۴)^۷$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۱۰^۶)^۸ = ۱۰^{۴۸}$

ب) (هر مثال می‌تواند متفاوت باشد):

رابطه	مثال
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$۵^۷ \times ۵^۸ = ۵^{۱۵}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$۹^{۱۰} \div ۹^۶ = ۹^۴$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$۲^۳ \times ۵^۳ = ۱۰^۳$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$\frac{۶^۴}{۳^۴} = ۲^۴$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۲^۳)^۴ = ۲^{۱۲}$

۲۹ صفحه ۸۷ **فعالیت**

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 = ۱۶$ هستند و چون $۴^2 = ۱۶$ و $(-۴)^2 = ۱۶$ ، پس ۴ و ۴- یا $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین، ریشه‌ی سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه‌ی سوم عدد ۲۷ ، ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 = ۲۷$ است که برابر ۳ می‌باشد. با همین استدلال، ریشه‌ی پنجم عدد ۳۲- ، پاسخ معادله‌ی $x^5 = -۳۲$ است که برابر ..... و ریشه‌های ششم عدد ۶۴ ، ریشه‌های معادله‌ی $x^6 =$ ..... هستند که برابر ۲+ و ۲- می‌باشند. جدول صفحه‌ی بعد را مانند نمونه کامل کنید.

$x^5 = -۳۲ \Rightarrow x = -۲$ (چون $(-۲)^5 = -۳۲$) ؛ و ریشه‌های ششم عدد ۶۴ ریشه‌های معادله‌ی $x^6 = ۶۴$ هستند ($۲^6 = ۶۴$ و $(-۲)^6 = ۶۴$).

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه‌های چهارم	$\pm\sqrt[4]{64}$ (≈ ±۲/۸۳)	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{64} \approx$ ۲/۸۳	وجود ندارد
ریشه‌ی پنجم	$\sqrt[5]{64} \approx$ ۲/۲۹۷	$\sqrt[5]{-64} \approx$ -۲/۲۹۷
$\sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{64} \approx$ ۲/۲۹۷	$\sqrt[5]{-64} \approx$ -۲/۲۹۷
ریشه‌های ششم	$(\pm\sqrt[6]{64})$ ۲ و -۲	وجود ندارد
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{64} =$ ۲	وجود ندارد
ریشه‌ی هفتم	$\sqrt[7]{64} \approx$ ۱/۸۱۱	$\sqrt[7]{-64} \approx$ -۱/۸۱۱
$\sqrt[7]{a}$	$\sqrt[7]{64} \approx$ ۱/۸۱۱	$\sqrt[7]{-64} \approx$ -۱/۸۱۱

نتیجه: برای n زوج، عدد مثبت دو ریشه‌ی nام (قرینه) دارد و عدد منفی ریشه ندارد؛ برای n فرد، هر عدد دقیقاً یک ریشه‌ی nام دارد.

۳۰ صفحه ۸۸ کار در کلاس

۱ـ با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به‌دست آورید.

$a \geq 0$ و n زوج است : $n = 8$ ، $a = 25$ $\Longrightarrow$ ریشه‌های ۸ام عدد ۲۵ = $\sqrt[8]{25} \approx$ ۱/۴۹۵ ، $-\sqrt[8]{25} \approx$ -۱/۴۹۵ (نمونه)

$a \geq 0$ و n فرد است : $a < 0 \Longrightarrow$, $n =$ و $a =$ n زوج است : $a < 0 \Longrightarrow$, $n =$ و $a =$ n فرد است : $a =$, $n =$ $\Longrightarrow$

- $a \geq 0$ و n فرد: $n = 3$ ، $a = 7$ $\Longrightarrow$ ریشه‌ی سوم عدد ۷ فقط $\sqrt[3]{7} \approx$ ۱/۹۱۳ است.
- $a < 0$ و n زوج: $n = 4$ ، $a = -9$ $\Longrightarrow$ ریشه‌ی چهارم عدد -۹ وجود ندارد (هیچ عددی به توان زوج منفی نمی‌شود).
- $a < 0$ و n فرد: $n = 5$ ، $a = -20$ $\Longrightarrow$ ریشه‌ی پنجم عدد -۲۰ برابر $\sqrt[5]{-20} \approx$ -۱/۸۲۱ است (فقط یک ریشه).

۳۱ صفحه ۸۸ کار در کلاس

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{(a^2)} = |a|$ و $\sqrt[3]{(a^3)} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی: $\sqrt[n]{(a^n)} = |a|$ اگر n زوج است و $a =$ اگر n فرد است. برای مثال، $\sqrt{(-15)^{10}} = |-15| =$ ۱۵ و $\sqrt[5]{(-8/3)^5} =$ $-8/3$ ، همچنین $\sqrt[4]{(-3)^4} =$ ..... و $\sqrt{()^{12}} =$ ۵

$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| =$ ۳ (n = ۴ زوج است).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$۵ = |\pm ۵| = \sqrt[۱۲]{(\pm ۵)^{۱۲}}$: داخل پرانتز می‌تواند ۵ یا ۵- باشد (n = ۱۲ زوج است).

۳۲ صفحه ۹۰ **فعالیت**

۱. پدر محمد زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. ... در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه‌ی باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت): ۱ ، ۲ ، ۳ ، .....(۴) ، ۵ ، .....(۶) ، ۷ ، ..... ، t جرم (گرم): ..... ، ..... ، ..... ، $۲^۴ = ۱۶$ ، ..... ، $۲^۶ = ۶۴$ ، ..... ، ..... ، ۲^t

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	t
جرم (گرم)	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۲^t

جرم هر ساعت دو برابر می‌شود، پس پس از t ساعت جرم ۲^t گرم است (دنباله‌ی هندسی با r = ۲).

۳۳ صفحه ۹۱ **فعالیت**

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به‌دست آورید.

پس از ۱۰ دقیقه (⅙ ساعت) = $\sqrt[۶]{۲}$ (نمونه) پس از ۲۰ دقیقه (..... ساعت) = ...

۲۰ دقیقه = $\frac{۱}{۳}$ ساعت. جرم $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲} \approx ۱/۲۶$ گرم است.

(بررسی: اگر در هر ۲۰ دقیقه جرم a برابر شود، پس از سه بار $a^۳ = ۲$ و $a = \sqrt[۳]{۲}$ ؛ همچنین پس از ۱۰ دقیقه $۲^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۲} \approx ۱/۱۲$ گرم.)

۳۴ صفحه ۹۲ **کار در کلاس**

اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$۵^{۳/۴} = ۶^{۷/۹} = ۱۲^{-۲/۱۱} = (۲\frac{۱}{۳})^{-۸/۳} = (۰/۰۰۱)^{۱۴/۴} =$

$۶^{\frac{۷}{۹}} = \sqrt[۹]{۶^۷}$ ؛ $۵^{\frac{۳}{۴}} = \sqrt[۴]{۵^۳} = \sqrt[۴]{۱۲۵}$

$۱۲^{-\frac{۲}{۱۱}} = \frac{۱}{۱۲^{\frac{۲}{۱۱}}} = \frac{۱}{\sqrt[۱۱]{۱۲^۲}} = \frac{۱}{\sqrt[۱۱]{۱۴۴}}$

$(۲\frac{۱}{۳})^{-\frac{۸}{۳}} = (\frac{۷}{۳})^{-\frac{۸}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۷}{۳})^۸}} = \sqrt[۳]{(\frac{۳}{۷})^۸}$

$(۰/۰۰۱)^{\frac{۱۴}{۴}} = (۰/۰۰۱)^{\frac{۷}{۲}} = \sqrt{(۰/۰۰۱)^۷} = \sqrt{۱۰^{-۲۱}} \approx ۳/۱۶ \times ۱۰^{-۱۱}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ صفحه ۹۲ | کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت‌های توانی زیر را به‌صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

$۳^{۱/۴} = ۷^{۱/۸} = ۲۵\sqrt{۳} = (۲/۷)\sqrt{۱۲} = (۰/۳۱)^{۱/۲} = ۱\sqrt{۱۰} =$

$\sqrt[۴]{۳} = ۳^{\frac{۱}{۴}}$ ؛ $\sqrt[۸]{۷} = ۷^{\frac{۱}{۸}}$ ؛ $۲۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۵}$

$(۲/۷)^{\frac{۱}{۱۲}} = \sqrt[۱۲]{۲/۷}$ ؛ $\sqrt{۰/۳۱} = (۰/۳۱)^{\frac{۱}{۲}}$ ؛ $۱^{\frac{۱}{۱۰}} = ۱ = \sqrt[۱۰]{۱}$

۳۶ صفحه ۹۲ | کار در کلاس

۲. با توجه به مسئله‌ی بیان شده در ابتدای معرفی توان‌های گویا، سرمایه‌ی شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان‌های خواسته شده به‌دست آورید. (سرمایه = ۱۰۰×$(۱/۲)^t$ بر حسب میلیون تومان، t به سال)

۶ ماه (½ سال) بعد : ۱۰۰×$(۱/۲)^{۱/۲}$ = ۱۰۰×$\sqrt{۱/۲}$ (نمونه) ۱ سال و ۲ ماه بعد : ۳ سال و ۶ ماه بعد : ۲۰۰ روز بعد :

۱ سال و ۲ ماه = $۱\frac{۱}{۶} = \frac{۷}{۶}$ سال: $۱۰۰\sqrt[۶]{۱/۲^۷} \approx ۱۲۳/۷ = ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۷}{۶}}$ میلیون تومان.

۳ سال و ۶ ماه = $\frac{۷}{۲}$ سال: $۱۰۰\sqrt{۱/۲^۷} \approx ۱۸۹/۳ = ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۷}{۲}}$ میلیون تومان.

۲۰۰ روز = $\frac{۲۰۰}{۳۶۵} = \frac{۴۰}{۷۳}$ سال: $۱۱۰/۵ \approx ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۴۰}{۷۳}}$ میلیون تومان. (نمونه: ≈ ۱۰۹/۵ میلیون تومان)

۳۷ صفحه ۹۳ | کار در کلاس

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$۴^{۱/۲} = (۲^۲)^{۱/۲} = ۲^{۲\times۱/۲} = ۲$ **(نمونه)** $= ۱۲۵^{-۱/۳} = ۱۰۰^{۱/۲} = ۳۲^{۱/۵} =$

$۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}} = (۵^۳)^{-\frac{۱}{۳}} = ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}$

$۱۰ = (۱۰^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۰^{\frac{۱}{۲}}$ ؛ $۳۲^{\frac{۱}{۵}} = (۲^۵)^{\frac{۱}{۵}} = ۲$

۳۸ صفحه ۹۳ | کار در کلاس

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$(۲\times۸)^{۱/۴} = -۴$ $(۱۰۰۰)^{۱/۳} = ۳^{۱/۳} \times ۳^{۲/۳} = ۳ = ۷^{۵/۴} \times ۷^{۳/۴} = ۱۲۵^{۲/۳} \div ۱۲۵^{۱/۴} = ۸^{۲/۷} \times (۱/۵)^{۲/۷} =$

$۲ = ۱۶^{\frac{۱}{۴}} = (۲ \times ۸)^{\frac{۱}{۴}}$ ؛ $-۴(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۳}} = -۴ \times ۱۰ = -۴۰$

$۳ = ۳^۱ = ۳^{\frac{۲}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}$ ؛ $۷^{\frac{۳}{۴}} \times ۷^{\frac{۵}{۴}} = ۷^۲ = ۴۹$

$\sqrt[۴]{۵} = ۵^{\frac{۱}{۴}} = ۵^{\frac{۵}{۱۲}} = (۵^۳)^{\frac{۵}{۱۲}} = ۱۲۵^{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}} = ۱۲۵^{\frac{۵}{۱۲}} = ۱۲۵^{\frac{۲}{۳}} \div ۱۲۵^{\frac{۱}{۴}}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

«(۱/۵)» در کتاب به‌معنی عدد اعشاری ۱/۵ (یک و نیم) خوانده شد: $\sqrt[۷]{۱۴۴} = ۱۲^{\frac{۲}{۷}} = (۸ \times ۱/۵)^{\frac{۲}{۷}} = (۱/۵)^{\frac{۲}{۷}} \times ۸^{\frac{۲}{۷}}$.
اگر منظور کسر یک‌پنجم باشد جواب $(\frac{۸}{۵})^{\frac{۲}{۷}}$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۹ صفحه ۹۳ کار در کلاس

۵. دانش‌آموزی $-\sqrt[۳]{۸}$ را به‌صورت $(-۸)^{۱/۳}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $-\sqrt[۳]{۸}$ به‌صورت $(-۸)^{۱/۳}$ نادرست است.

در این کتاب توان گویای $a^{۱/n}$ فقط برای $a > ۰$ تعریف شده است: $a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (a مثبت). چون پایه‌ی (−۸) منفی است، $(-۸)^{۱/۳}$ در این کتاب تعریف نشده است؛ پس نوشتن $-\sqrt[۳]{۸} = (-۸)^{۱/۳}$ درست نیست، هرچند $-\sqrt[۳]{۸} = -۲$ وجود دارد.

(مثلاً اگر اجازه می‌دادیم، $(-۸)^{۲/۶}$ با $(-۸)^{۱/۳}$ برابر می‌شد، ولی $(-۸)^{۲/۶} = \sqrt[۶]{(۶۴)^{۲}} = ۲$ و $-\sqrt[۳]{۸} = -۲$ ؛ تناقض.)

---

۴۰ صفحه ۹۳ تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt[۴]{(۵^{۲})}$ ، $\sqrt[۶]{(۵^{۳})}$ با هم برابرند.

$\sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}} = ۵^{\frac{۲}{۴}} = (۵^{۲})^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۵^{۲}}$

$\sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}} = ۵^{\frac{۳}{۶}} = (۵^{۳})^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۵^{۳}}$. پس هر سه برابرند.

---

۴۱ صفحه ۹۳ تمرین

۲. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

$۳^{۱/۳} \times ۳^{۱/۴} = ۳^{۱/۴} \times ۵^{(-۱/۴)} = ۸^{۱/۲} \times ۲^{۱/۳} = (۲^{۶})^{۱/۳} =$

$= (m^{۲}n^{۳})^{۱/۲}{}^{۲}(n^{۱/۲} \cdot m^{۳/۴}) = ۳^{۰/۷۴} \times ۳^{۰/۲۶} = (a^{-۱/۲}/a^{-۱/۴})^{-۴} = (۳^{۴}/۲^{۶})^{۱/۲} =$

$۳^{\frac{۷}{۱۲}} = ۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} ؛ ۱ = ۵^{۰} = ۵^{\frac{۱}{۴}} \times ۵^{-\frac{۱}{۴}} ؛ ۴ = ۱۶^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۸^{\frac{۱}{۲}} ؛ ۴ = ۲^{۲} = (۲^{۶})^{\frac{۱}{۳}}$

$\frac{۹}{۸} = \frac{۳^{۲}}{۲^{۳}} = (\frac{۳^{۴}}{۲^{۶}})^{\frac{۱}{۲}} ؛ a = (a^{-\frac{۱}{۴}})^{-۴} = (\frac{a^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{-\frac{۱}{۴}}})^{-۴} ؛ ۳ = ۳^{۱} = ۳^{۰/۷۴} \times ۳^{۰/۲۶}$

$(mn)^{\frac{۵}{۲}} = m^{\frac{۵}{۲}}n^{\frac{۵}{۲}} = m^{\frac{۳}{۲}}n \times m\,n^{\frac{۳}{۲}} = (m^{۲}n^{۳})^{\frac{۱}{۲}}(m^{\frac{۳}{۴}}n^{\frac{۱}{۲}})^{۲}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۲ صفحه ۹۴ تمرین

۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$8^x \times 8^5 = 9^5 \times 72^5$ $(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^7$ $(3^x)^6 / 1/3^2 = x^5 \times 15^3 / (3 \times 3^5 \times 3^2) = 5^8$

۱) $72 = 8 \times 9$ ، پس $72^5 = 8^5 \times 9^5$ و $8^x = 8^5 \Rightarrow x = 5$.

۲) $x = 9 \Rightarrow 7 = 6 - x + 4$.

۳) $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-2}$.

۴) مخرج $3^8 = 3 \times 3^5 \times 3^2$ ، پس $x = 15 \Rightarrow x^5 = 15^5 \Rightarrow x^5 = 15^8 = 3^8 \times 5^8$.

۴۳ صفحه ۹۴ تمرین

۴. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = (4/3)\pi r^3$ (v حجم کره) به‌دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای را از فرمول زیر به‌دست آورد. $r = (3v/4\pi)^{1/3}$

ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $32\pi/3$ است، به‌دست آورید.



الف) $v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{3v}{4\pi}$. ریشه‌ی سوم دو طرف (r مثبت است): $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} = (\frac{3v}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$.

ب) $r = (\frac{3 \times \frac{32\pi}{3}}{4\pi})^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = 2$ واحد (شعاع ۲).

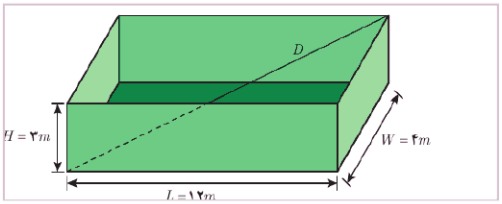
۴۴ صفحه ۹۴ تمرین

۵. اگر D قطر جعبه‌ی زیر باشد، اندازه‌ی آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{1/2}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به‌دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه‌ی D را به‌دست آورید. ($L = 12m$ ، $W = 4m$ ، $H = 3m$)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) اگر اندازه‌ی L = W = H = ۱m باشد، اندازه‌ی D را به‌دست آورید.



الف) $D = (۱۲^۲ + ۴^۲ + ۳^۲)^{\frac{۱}{۲}} = (۱۴۴ + ۱۶ + ۹)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۶۹^{\frac{۱}{۲}} = ۱۳$ متر.

ب) $D = (۱ + ۱ + ۱)^{\frac{۱}{۲}} = ۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$ متر.

۴۵ صفحه ۹۵ فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» ... بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله‌ی اوّل، یکی از عوامل آلوده‌کننده‌ی محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحله‌ی دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله‌ی بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله‌ی بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحله‌ی ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید. (جدول ۱: تعداد مراحل بازی ۰ تا ۱۰ و میزان امتیازهای کسب شده؛ $۳^۰=۱$ ، $۳^۱=۳$ ، $۳^۲=۹$ ، $۳^۳=۲۷$ ، ؟ برای مرحله‌ی ۴ ، ۲۴۳ برای ؟ ، مراحل ۶ تا ۱۰ ؟)

تعداد مراحل بازی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
امتیاز کسب شده	$۳^۰=۱$	$۳^۱=۳$	$۳^۲=۹$	$۳^۳=۲۷$	$۳^۴=۸۱$	$۳^۵=۲۴۳$	$۳^۶=۷۲۹$	$۳^۷=۲۱۸۷$	$۳^۸=۶۵۶۱$	$۳^۹=۱۹۶۸۳$	$۳^{۱۰}=۵۹۰۴۹$

در مرحله‌ی ششم $۳^۶ = ۷۲۹$ امتیاز می‌گیرد؛ ۲۴۳ مربوط به مرحله‌ی ۵ است.

۴۶ صفحه ۹۶ فعالیت

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازهای کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازهای کسب شده، رابطه‌ای به‌دست آورید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴. با توجه به رابطه‌ی به‌دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازهای کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله‌ی nام را به‌دست آورید؟

۲. $n = ۸ \Rightarrow ۳^n = ۶۵۶۱ = ۳^۸$ ، یعنی در مرحله‌ی هشتم.

۳. بله؛ هر مرحله ۳ برابر مرحله‌ی قبل است: امتیاز مرحله‌ی n برابر $f(n) = ۳^n$ است.

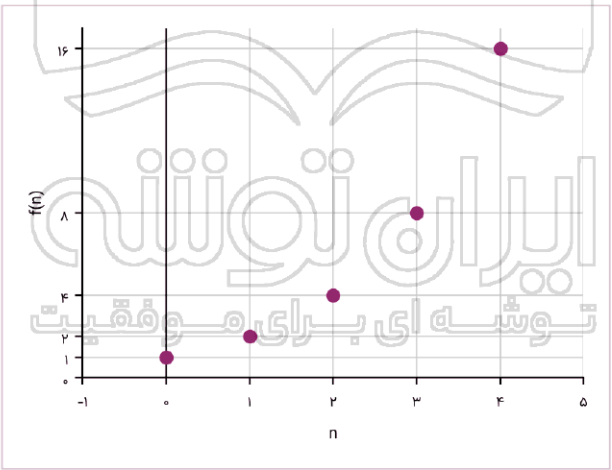
۴. مرحله‌ی دهم: $۳^{۱۰} = ۵۹۰۴۹$ ؛ مرحله‌ی بیستم: $۳^{۲۰} = ۳۴۸۶۷۸۴۴۰۱$ ؛ مرحله‌ی n ام: ۳^n . (امتیاز $۳^{۱۶} = ۴۳۰۴۶۷۲۱$ یعنی پایان بازی در مرحله‌ی شانزدهم.)

۴۷ صفحه ۹۶ فعالیت

در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به‌دست آوردیم که به‌عنوان تابع از ضابطه‌ی $f(n) = ۲^n$ پیروی می‌کرد. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم؛

۱. مقادیر به‌دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به‌دست آمده را روی دستگاه مختصات نمایش دهید.

n	۰	۱	۲	۳	۴
$f(n) = ۲^n$	۱	۲	۴	۸	۱۶



نقاط (۰,۱) ، (۱,۲) ، (۲,۴) ، (۳,۸) ، (۴,۱۶) هستند؛ این نقاط روی یک خط نیستند و به‌سرعت بالا می‌روند.

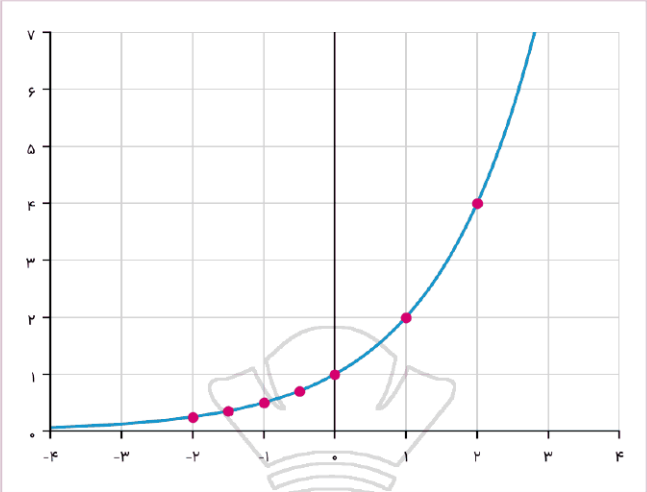
۴۸ صفحه ۹۶ فعالیت

۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

-2 ، $-3/2$ ، -1 ، $-\frac{1}{2}$ ، 0 : x و 2^x : 1 ، $0/707$ ، $0/500$ ، $0/353$ ، $0/250$

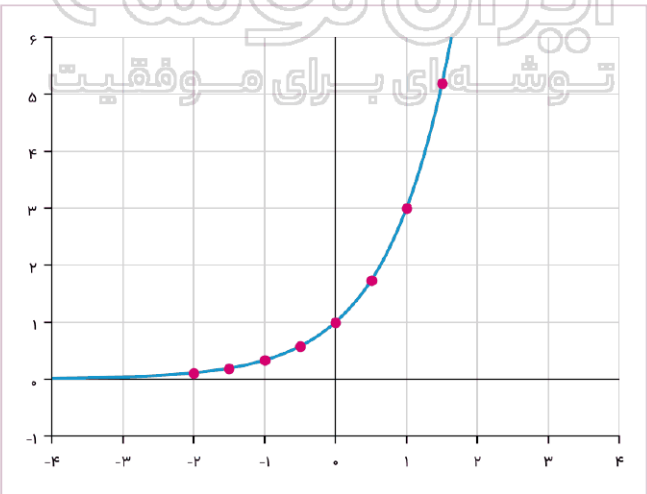
نقاط: (۰, ۱) ، (−۰/۵ , ۰/۷۰۷) ، (−۱ , ۰/۵) ، (−۱/۵ , ۰/۳۵۳) ، (−۲ , ۰/۲۵). مقدارها مثبت‌اند و هرچه x کوچک‌تر (منفی‌تر) می‌شود به صفر نزدیک‌تر می‌شوند.



۴۹ صفحه ۹۷ **فعالیت**

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه‌ی بعد را روی محورهای مختصات بیاورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

نقاط جدول ۲: (−۲ , ۰/۱۱۱) ، (−۱/۵ , ۰/۱۹۲) ، (−۱ , ۰/۳۳۳) ، (−۰/۵ , ۰/۵۷۷) ، (۰ , ۱) ، (۰/۵ , ۱/۷۳۲) ، (۱ , ۳) ، (۱/۵ , ۵/۱۹۶) ، (۲ , ۹) . با وصل کردن آنها منحنی صعودی زیر به‌دست می‌آید که محور y ها را در (۰,۱) قطع می‌کند؛ نمودار بالای محور x است و به آن نزدیک می‌شود ولی قطعش نمی‌کند.



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۰ صفحه ۹۸ فعالیت

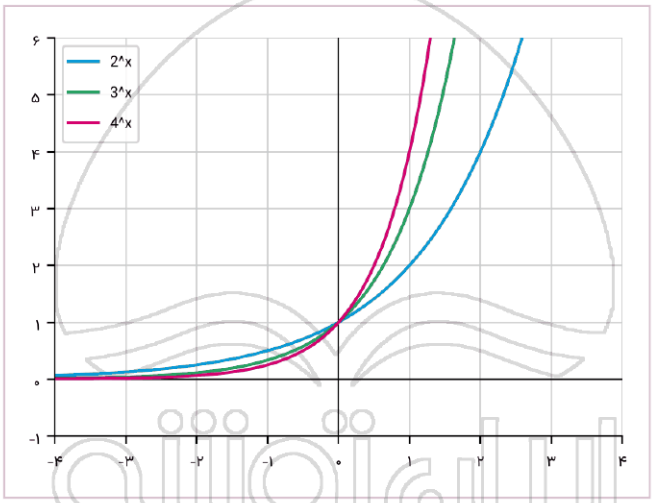
ب) با استفاده از نمودار تابع $y = ۳^x$ ، مقدار تقریبی عدد $۳^{۵/۲}$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار توابع $y = ۲^x$ ، $y = ۳^x$ و $y = ۴^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.

ب) $۳^{\frac{۵}{۲}} = ۳^{۲} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} = ۹\sqrt{۳}$. از نمودار، به ازای $x = ۰/۵$ مقدار $y \approx ۱/۷$ است؛ پس $۹ \times ۱/۷۳ \approx ۱۵/۶$.

پ) در شکل کتاب، نمودار آبی (کم‌شیب‌ترین) مربوط به $y = ۲^x$ ، سبز مربوط به $y = ۳^x$ و صورتی (تندترین) مربوط به $y = ۴^x$ است؛ زیرا برای $x > ۰$ هرچه پایه بزرگ‌تر، y بزرگ‌تر است.

- شباهت‌ها: هر سه از نقطه‌ی (۰،۱) می‌گذرند؛ بالای محور x هستند ($y > ۰$)؛ صعودی‌اند؛ هرچه x کوچک‌تر شود به محور x نزدیک می‌شوند بی‌آنکه آن را قطع کنند.
- تفاوت‌ها: برای $x > ۰$ هرچه پایه بزرگ‌تر باشد، نمودار سریع‌تر بالا می‌رود (۴^x از ۳^x و آن از ۲^x تندتر)؛ برای $x < ۰$ هرچه پایه بزرگ‌تر باشد نمودار زودتر به محور x نزدیک می‌شود.

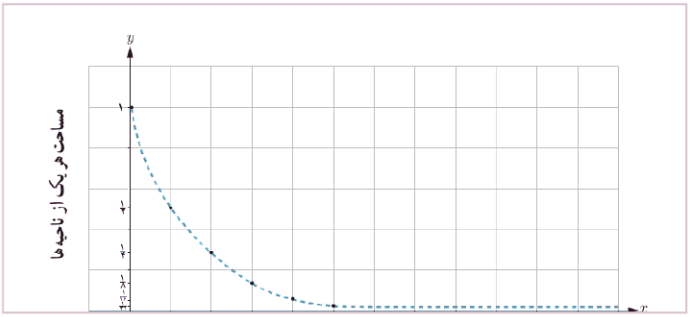


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۱ صفحه ۹۹ فعالیت

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک‌بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی ¼ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند، نشان داده شده است. (تعداد تا زدن ۰: ۱ ؛ ۱: ½ ؛ ۲: ¼ ؛ ۳: ⅛ ؛ ۴: ؟ ؛ ؟: ۱/۳۲ ؛ ... ؛ ۸: ؟ ؛ ؟: ۱/۱۰۲۴)

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟ در نمودار زیر، رابطه‌ی تعداد تا زدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها نمایش داده شده است. نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور y ها چیست؟



تعداد تا زدن‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۸	۱۰
مساحت هر ناحیه	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۳۲}$	$\frac{۱}{۲۵۶}$	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$

الگو: مساحت هر ناحیه پس از n بار تا زدن $f(n) = (\frac{۱}{۲})^n = \frac{۱}{۲^n}$ است ($۲^{-۱۰} = ۱/۱۰۲۴$ مربوط به $n = ۱۰$). منحنی محور y ها را در نقطه‌ی $(۰ , ۱)$ قطع می‌کند ($n = ۰$: مساحت کامل = ۱).

۵۲ صفحه ۱۰۰ **فعالیت**

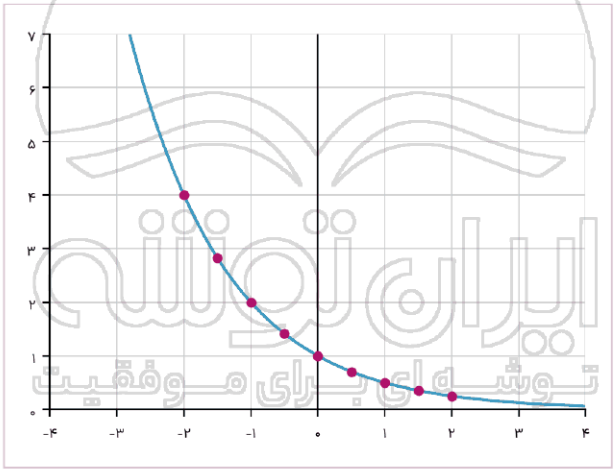
۱. تابع $y = (½)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید. (جدول ۴: ستون‌ها x ، $(½)^x$ ، y ، محاسبه‌ی y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار؛ $x = -۲ ، -۳/۲ ، -۱ ، -۱/۲ ، ۰ ، ½ ، ۱ ، ۳/۲ ، ۲$ ؛ نمونه: $x = -۲ \Longrightarrow (½)^{-۲} = ۴$)

۲. نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را روی صفحه‌ی مختصات به‌دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار، مقدار تابع $(½)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳. نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ ، که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟

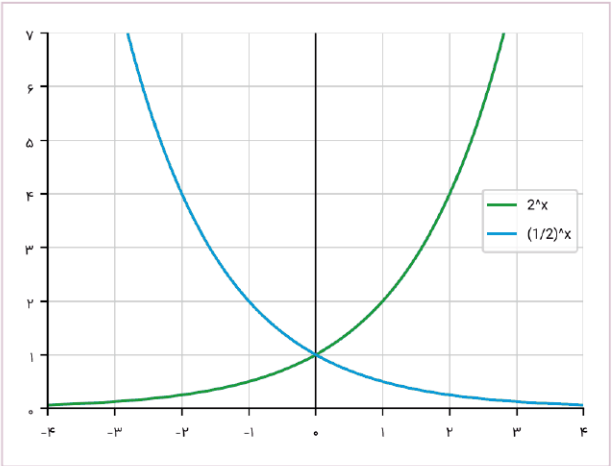
x	$(\frac{1}{2})^x$	y	مقدار با ماشین حساب
-2	$(\frac{1}{2})^{-2}$	۴	۴
$-3/2$	$(\frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}$	$2\sqrt{2}$	۲/۸۲۸
-1	$(\frac{1}{2})^{-1}$	۲	۲
$-1/2$	$(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$	۱/۴۱۴
۰	$(\frac{1}{2})^{0}$	۱	۱
۱/۲	$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰/۷۰۷
۱	$(\frac{1}{2})^{1}$	$\frac{1}{2}$	۰/۵۰۰
۳/۲	$(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	۰/۳۵۴
۲	$(\frac{1}{2})^{2}$	$\frac{1}{4}$	۰/۲۵۰



۲. بله؛ نمودار پیوسته است و برای هر x می‌توان y را از روی منحنی تقریباً خواند (همیشه مثبت).

۳. دو نمودار نسبت به محور y ها قرینه‌اند: $y = 2^x$ صعودی است (x بزرگ‌تر، y بزرگ‌تر) ولی $y = (\frac{1}{2})^x$ نزولی است (x بزرگ‌تر، y کوچک‌تر). هر دو از (۰,۱) می‌گذرند و بالای محور xاند.

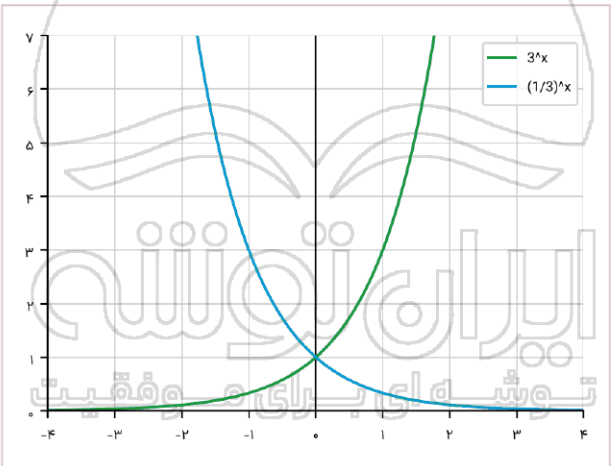
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۵۳ صفحه ۱۰۱ کار در کلاس

تابع نمایی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد $a (a > 1)$، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = (1/a)^x$ را در همان صفحه‌ی مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.

مثلاً $a = 3$: $f(x) = 3^x$ و $g(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$. چون $g(x) = f(-x)$ ، نمودار g قرینه‌ی نمودار f نسبت به محور y ها است. f صعودی و g نزولی است؛ هر دو از (۰,۱) می‌گذرند، بالای محور x هستند و به آن نزدیک می‌شوند.



۵۴ صفحه ۱۰۱ تمرین

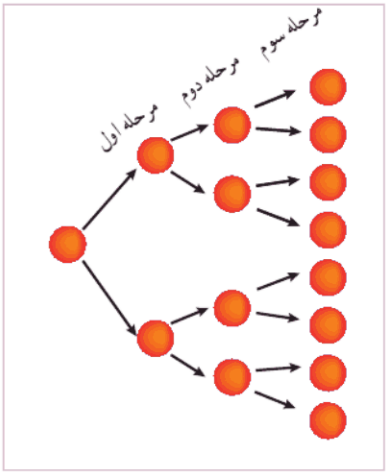
۱. در پژوهشکده‌ی رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه‌ی قلب را به‌وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است. اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند :

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحله‌ی هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟



در مرحله‌ی اول ۲ سلول، دوم ۴ و سوم ۸ سلول داریم؛ هر مرحله دو برابر قبلی است.

الف) $n = ۱۱ \Rightarrow ۲^{۱۱} = ۲۰۴۸ = ۲^n$ ، یعنی پس از ۱۱ مرحله.

ب) $۲^۸ = ۲۵۶$ سلول.

پ) تعداد سلول‌ها در مرحله‌ی n ام $f(n) = ۲^n$ است (تابع نمایی).

۵۵ صفحه ۱۰۱ **تمرین**

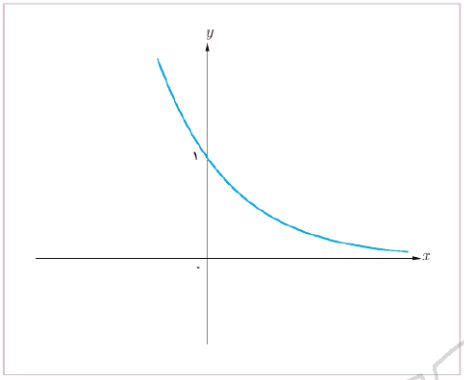
۲. یک نمونه‌ی واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

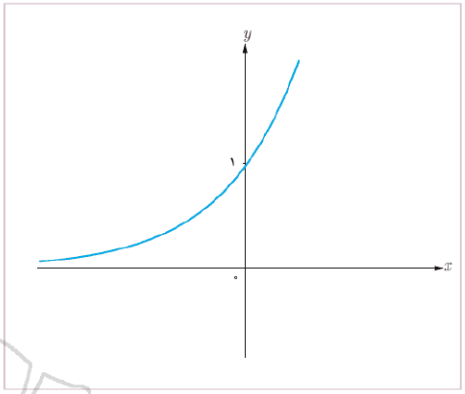
مثال: یک باکتری که هر ساعت به دو باکتری تقسیم می‌شود؛ پس از t ساعت تعداد باکتری‌ها ۲^t برابر اولیه است. نمونه‌های دیگر: انتشار یک شایعه (هر نفر به ۳ نفر می‌گوید: ۳^n نفر در مرحله‌ی n ام)؛ رشد جمعیت یا سرمایه‌ی بانکی با سود مرکب؛ کاهش نمایی مقدار دارو در خون.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۶ صفحه ۱۰۱ تمرین

۳. در شکل صفحه‌ی بعد، نمودار دو تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



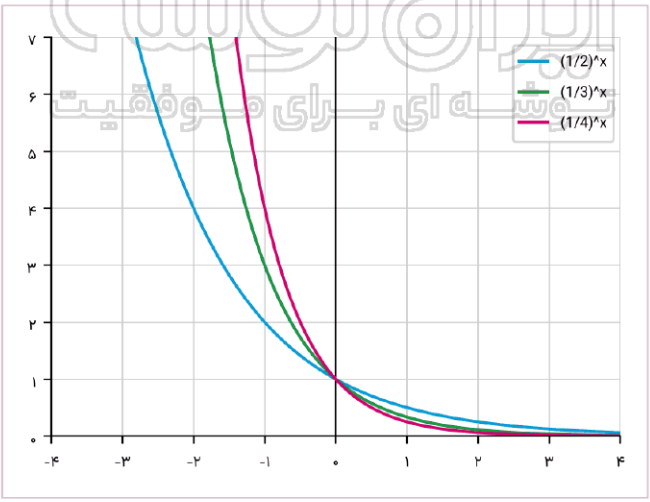


نمودار سمت چپ (صعودی) مربوط به $y = 4^x$ است چون پایه‌ی آن بزرگ‌تر از ۱ است و با افزایش x مقدار y زیاد می‌شود.

نمودار سمت راست (نزولی) مربوط به $y = (\frac{1}{4})^x$ است چون پایه‌ی آن بین ۰ و ۱ است و با افزایش x مقدار y کم می‌شود. (هر دو از (۰,۱) می‌گذرند.)

۵۷ صفحه ۱۰۲ تمرین

۴. نمودار توابع $y = (\frac{1}{2})^x$ ، $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ را در یک دستگاه (صفحه‌ی مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.



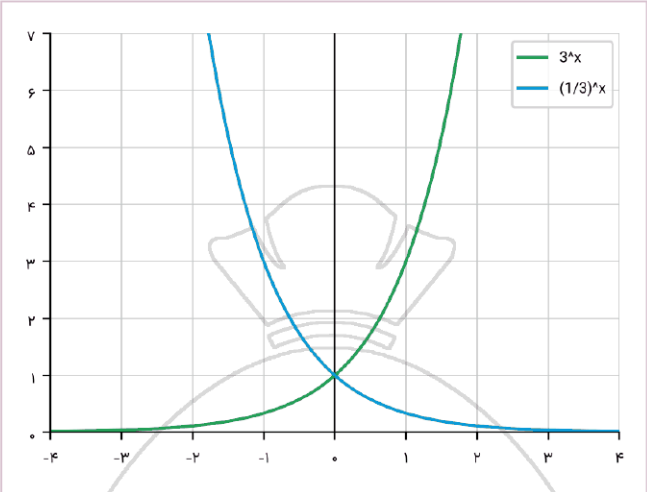
- شباهت‌ها: هر سه از (۰,۱) می‌گذرند؛ بالای محور x هستند؛ نزولی‌اند و برای x های بزرگ به محور x نزدیک می‌شوند (آن را قطع نمی‌کنند)؛ دامنه‌ی هر سه $\mathbb{R}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- تفاوت‌ها: برای $x > 0$ هرچه پایه کوچک‌تر (مثل ¼) باشد، نمودار سریع‌تر به محور x نزدیک می‌شود؛ برای $x < 0$ هرچه پایه کوچک‌تر باشد، y سریع‌تر زیاد می‌شود (نمودار ¼ بالاتر از ⅓ و آن بالاتر از ½).

۵۸ صفحه ۱۰۲ **تمرین**

۵. نمودار توابع $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.



$3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$ ، پس دو نمودار نسبت به محور y ها قرینه‌اند: $y = 3^x$ صعودی و $y = (\frac{1}{3})^x$ نزولی است. هر دو از (۰,۱) می‌گذرند و هیچ‌کدام محور x را قطع نمی‌کنند.

۵۹ صفحه ۱۰۲ **فعالیت**

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرمودهٔ رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده‌ی کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد. جدول زیر (جدول ۵: سن احسان ۱۷ ، ۱۸ ، ۱۹ ، ... ، ۲۳ و مبلغ سرمایه‌گذاری شده؛ برای سن ۱۷ : ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان) را در نظر بگیرید؛ برای تکمیل جدول ۵، ابتدا مبلغ سرمایه‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک‌سال بعد از سپرده‌گذاری در شرکت) را به‌دست آورید:

۱۰,۰۰۰,۰۰۰ + (... × ۱۴/۱۰۰) = ... + ۱,۴۰۰,۰۰۰ = ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ . اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید:

۱۱,۴۰۰,۰۰۰ + ... = ... + ... = ... با توجه به فرمول ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ × $(1/14)^2$ = ۱۲,۹۹۶,۰۰۰ ، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به‌دست آورید و جدول صفحه‌ی قبل را کامل کنید.

هر سال مبلغ ۱/۱۴ برابر می‌شود (۱۰۰٪ + ۱۴٪)؛ دنباله‌ی هندسی با $r = 1/14$:

۱۸ سالگی: ۱۱۴۰۰۰۰۰ = ۱۴۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ = (۱۰۰۰۰۰۰۰ × $\frac{14}{100}$) + ۱۰۰۰۰۰۰۰

۱۹ سالگی: ۱۲۹۹۶۰۰۰ = ۱۵۹۶۰۰۰ + ۱۱۴۰۰۰۰۰ = (۱۱۴۰۰۰۰۰ × $\frac{۱۴}{۱۰۰}$) + ۱۱۴۰۰۰۰۰

سن احسان	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
مبلغ (تومان)	۱۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۱,۴۰۰,۰۰۰	۱۲,۹۹۶,۰۰۰	۱۴,۸۱۵,۴۴۰	۱۶,۸۸۹,۶۰۲	۱۹,۲۵۴,۱۴۶	۲۱,۹۴۹,۷۲۶

۲۳ سالگی (۶ سال بعد): ۲۱۹۴۹۷۲۶ ≈ $(۱/۱۴)^{۶}$ × ۱۰۰۰۰۰۰۰ تومان.

۶۰ صفحه ۱۰۳ **کار در کلاس**

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره‌ی زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره‌ی زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره‌ی زمین چه میزان خواهد شد؟ آیا می‌توانید وضع جمعیت کره‌ی زمین را در هر دوره‌ی زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

طبق $f(t) = c(۱ + r)^t$ با $c = ۵/۲$ و $r = ۰/۰۲$:

پس از (سال)	۳۰	۳۵	۷۰	۱۰۵
جمعیت (میلیارد)	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۳۰} \approx ۹/۴۲$	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۳۵} \approx ۱۰/۴$	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۷۰} \approx ۲۰/۸$	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۱۰۵} \approx ۴۱/۶$

چون $۱/۰۲^{۳۵} \approx ۲$ ، در هر دوره‌ی ۳۵ ساله جمعیت تقریباً **دو برابر** می‌شود (۵/۲ ← ۱۰/۴ ← ۲۰/۸ ← ۴۱/۶).

یعنی رشد نمایی با افزایش ثابت درصدی، با گذشت زمان به افزایش‌های مطلق بسیار بزرگ‌تر می‌انجامد.

۶۱ صفحه ۱۰۴ **تمرین**

۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده‌ی محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام‌داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از ده سال، چه مبلغی به سرمایه‌ی این سهام‌دار اضافه خواهد شد؟

سود ۱۴٪ در سال: ۱۴۸۲۸۸۸۵۳ ≈ $(۱/۱۴)^{۱۰}$ × ۴۰۰۰۰۰۰۰ = f(۱۰) تومان.

مبلغ اضافه‌شده: ۱۰۸۲۸۸۸۵۳ ≈ ۴۰۰۰۰۰۰۰ - ۱۴۸۲۸۸۸۵۳ تومان (حدود ۱۰۸ میلیون تومان).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

۶۲ صفحه ۱۰۴ تمرین

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به‌صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

$f(10) = 1000000 \times (1/06)^{10} \approx 1790848$ نفر.

۶۳ صفحه ۱۰۴ تمرین

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به‌دست آورید.

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

موش‌ها: $23576 \times (0/975)^n$ ؛ گربه‌ها: $15786 \times (1/018)^n$ (n سال پس از سال اول، گرد شده به عدد صحیح).

n (سال)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
موش‌ها	۲۳۵۷۶	۲۲۹۸۷	۲۲۴۱۲	۲۱۸۵۲	۲۱۳۰۵	۲۰۷۷۳	۲۰۲۵۳	۱۹۷۴۷	۱۹۲۵۳	۱۸۷۷۲	۱۸۳۰۳
گربه‌ها	۱۵۷۸۶	۱۶۰۷۰	۱۶۳۵۹	۱۶۶۵۴	۱۶۹۵۴	۱۷۲۵۹	۱۷۵۶۹	۱۷۸۸۶	۱۸۲۰۸	۱۸۵۳۵	۱۸۸۶۹

پ) در سال نهم هنوز موش‌ها بیشترند (۱۸۷۷۲ در برابر ۱۸۵۳۵) ولی در **سال دهم** گربه‌ها بیشتر می‌شوند (۱۸۸۶۹ در برابر ۱۸۳۰۳).

ت) برابری در بین سال نهم و دهم، حدود ۹/۳ سال پس از آغاز رخ می‌دهد: $\left(\frac{1/018}{0/975}\right)^n = \frac{23576}{15786} \approx 1/493 \Rightarrow n \approx 9/3$ ؛ در سال‌های صحیح دقیقاً برابر نمی‌شوند.

ث) جمعیت موش‌ها هر سال ۰/۹۷۵ برابر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود (هیچ‌گاه دقیقاً صفر نمی‌شود)، ولی جمعیت گربه‌ها هر سال ۱/۰۱۸ برابر می‌شود و بدون کران زیاد می‌شود. (در واقعیت با کم شدن غذا رشد گربه‌ها محدود می‌شود.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت